SF1624 Algebra och geometri

Tolfte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

17 november, 2009

Trippelprodukt

Vi införde tidigare en trippelprodukt av tre vektorer, $\overline{u} \times \overline{v} \cdot w$, som beräknade volymen av den *parallellepiped* som spänns upp av $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$.
Vi kom fram till en formel för trippelprodukten med hjälp av koordinaterna. Om $\overline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ och $\overline{w} = (x_3, y_3, z_3)$, så är

$$\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} = x_1 y_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 + y_1 z_2 x_3 - y_1 x_2 z_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3.$$

Trippelprodukt och ekvationssystem

Om vi tänker $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ som kolonner i en matris A så kan lösa

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

för alla högerled $\overline{b}$ med en unik lösning precis om $\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} \neq 0$. Det kan vi se genom att

$$A\overline{x} = x_1\overline{u} + x_2\overline{v} + x_3\overline{w}$$

och vi kommer att nå alla vektorer $\overline{b}$ med detta precis om $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ inte ligger i ett plan.

Linjärt oberoende och baser

När det går att uttrycka varje vektor $\overline{b}$ i $\mathbb{R}^3$ på ett unikt sätt som

$$\overline{b} = x_1\overline{u} + x_2\overline{v} + x_3\overline{w}, \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

säger vi att $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ utgör en *bas* för $\mathbb{R}^3$.
Vi säger att de är *linjärt oberoende* om alla linjärkombinationer av dem är olika. Detta är ekvivalent med att

$$x_1\overline{u} + x_2\overline{v} + x_3\overline{w} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Det är också ekvivalent med att

ingen av dem är en linjärkombination av de andra

och också att $\overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} \neq 0$.

Generalisering av trippelprodukt

Om vi vill mäta volym i högre dimensioner så skulle vi vilja ha en motsvarighet till trippelprodukten. Vi kallar den det och vill att den ska uppfylla föjande:

1. $\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n) \in \mathbb{R}$ för $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ i $\mathbb{R}^n$.
2. $\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i + \overline{u}_i', \ldots, \overline{u}_n) =$
   $\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_n) + \det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i', \ldots, \overline{u}_n)$
3. $\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, a\overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_n) = a \det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_n)$
4. $\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_j, \ldots, \overline{u}_n) =$
   $-\det(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_j, \ldots, \overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_n)$

Vi säger att 2 och 3 betyder att det är *multilinjär* och att 4 betyder att det är *alternerande* eller *antisymmetrisk*.

Formel för determinanten

Vi kan skriva upp en allmän formel för determinanten av en $n \times n$-matris som

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

där summan går över alla *permutationer*, σ, och där $\operatorname{sgn}(\sigma)$ är *tecknet*, som är $+1$ om σ är en jämn permutation och -1 om σ är en udda permutation.